Anales de la Real Academia de Doctores
Volumen 5, pp. 343-371, 2001

UN NUEVO PROCEDIMIENTO PARA EL CÁLCULO DE LA POTENCIA DE UN TEST BAJO LA HIPÓTESIS DE LA *Ley de WEIBULL: W (0,θ,1)* BASADO EN LEYES DE PROBABILIDAD DISCRETAS

FCO. JAVIER DÍAZ-LLANOS Y SAINZ-CALLEJA
y CARMEN CERMEÑO CARRASCO

RESUMEN: En este trabajo hemos expuesto unas fórmulas que hemos elaborado, las cuales nos permiten calcular la potencia del test —para uno y dos parámetros— asociados a una y dos Leyes de WEIBULL, mediante la aplicación de la Ley de probabilidad de Siméon-Denis POISSON(1830) y la Binomial, respectivamente. A continuación, para mejorar la comprensión del planteamiento teórico, hemos aplicado dichas fórmulas a dos ejercicios prácticos.

INTRODUCCIÓN: La realización de este estudio no ha sido por un mero capricho.En realidad, dos han sido los motivos que nos han impulsado a su realización.En primer lugar, porque mantenemos que la

$$Ley\, de\, WEIBULL: X \hookrightarrow W(0,\theta,1)\,,\, \theta \in R_+^*$$

resulta más idónea que

$$Ley\, de\, LAPLACE\text{-}GAUSS: X \hookrightarrow LG(\mu,\sigma)\,,\, \mu \in R\,,\, \sigma \in R_+^*$$

en los procesos de experimentación científica.

Y en segundo lugar, debido a que,precisamente, los procesos de esta segunda Ley mencionada son los que suelen aplicarse en la mayoría de los textos de Estadística.

Partiendo de estos hechos, hemos llegado a unas fórmulas que nos permiten calcular la potencia y la función de potencia del test mediante la utilización de la Ley de Siméon-Denis POISSON(1830) y la Ley Binomial, en lugar de la

$$\chi^2_{2n} \text{ de } HELMERT(1875) \text{ y la } F^{2n_1}_{2n_2} \text{ de } FISHER\text{-}SNÉDECOR$$

Por otra parte, hemos contemplado en los anexos aquellos conocimientos del cálculo de probabilidades que resultan imprescindibles para llegar a las fórmulas que nos permiten el cálculo de la potencia, ya que no suelen estar recogidos en los libros de Estadística, y mucho menos en lo que respecta a nuestro enfoque particular.

1. PROCEDIMIENTOS EMPLEADOS

Las **cuatro situaciones hipotéticas** que hemos incluido en este trabajo,las hemos diseñado para abordar los puntos siguientes:

A) Cálculo de la potencia del test bajo la primera situación hipotética:

$$X \hookrightarrow W(0,\theta,1)$$

$$H_o : \theta = \theta_o$$

$$H_1 : \theta = \theta_1$$

$$\theta_1 > \theta_o$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad , \alpha_1 = 0$$

B) Cálculo de la función de potencia del test bajo la segunda situación hipotética:

$$X \hookrightarrow W(0,\theta,1)$$

$$H_o : \theta = \theta_o$$

$$H_1 . \theta > \theta_o$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad , \alpha_1 = 0$$

C) Cálculo de la potencia del test bajo la tercera situación hipotética

$$X \hookrightarrow W(0,\theta_1,1) \quad e \quad Y \hookrightarrow W(0,\theta_2,1)$$

$$X \; e \; Y \; son \; independientes$$

$$H_o : \frac{\theta_1}{\theta_2} = c_o$$

$$H_1 : \frac{\theta_1}{\theta_2} = c_1$$

$$c_1 > c_o$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad , \alpha_1 = 0$$

D) Cálculo de la función de potencia del test bajo la cuarta situación hipotética

$$X \hookrightarrow W\left(0,\theta_1,1\right) \;\; e \;\; Y \hookrightarrow W\left(0,\theta_2,1\right)$$

$$X \; e \; Y \; son \; independientes$$

$$H_o : \frac{\theta_1}{\theta_2} = c_o$$

$$H_1 : \frac{\theta_1}{\theta_2} > c_o$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad , \alpha_1 = 0$$

1.1. Primera situación hipotética

$$H_o : \theta = \theta_o$$

$$H_1 : \theta = \theta_1$$

$$\theta_1 > \theta_o$$

La fórmula inicial, que va a permitirnos expresar la potencia del test, en función de:

$$\theta_1, n_1 \, y \, K^D\left(\alpha_2\right)$$

es la siguiente:

$$\eta = P\left[\frac{\sum_{j=1}^{j=n_1} X_j}{n_1} \geq K^D\left(\alpha_2\right) \mid \theta = \theta_1\right]$$

Teniendo en cuenta el siguiente resultado, que hemos demostrado en el anexo II,

$$P\left(\sum_{j=1}^{j=n} X_j \geq h\right) = P\left[0 \leq P\left(\frac{h}{\theta}\right) \leq (n-1)\right] \qquad , \; \frac{h}{\theta} \in R_+^*$$

llegamos —sin dificultad— a esta expresión,

$$\eta = P\left[0 \leq \mathrm{P}\left(\frac{n_1 K^D\left(\alpha_2\right)}{\theta_1}\right) \leq (n_1 - 1)\right]$$

tal como puede verse a continuación:

$$P\left[\frac{\sum_{j=1}^{j=n_1} X_j}{n_1} \geq K^D(\alpha_2) | \theta = \theta_1\right] = P\left[\sum_{j=1}^{j=n_1} X_j \geq n_1 K^D\left(\alpha_2\right)\right] =$$

$$= P\left(0 \leq P\left(\frac{n_1 K^D(\alpha_2)}{\theta_1}\right) \leq (n_1 - 1)\right)$$

Por tanto, la fórmula

$$\eta = P\left(0 \leq P\left(\frac{n_1 K^D(\alpha_2)}{\theta_1}\right) \leq (n_1 - 1)\right)$$

nos permite calcular la potencia del test en función de

$$\theta_1, n_1 \, y \, K^D(\alpha_2)$$

1.2. Segunda situación hipotética

$$H_o : \theta = \theta_o$$

$$H_1 : \theta > \theta_o$$

Operando de igual forma que en la **primera situación hipotética,** podemos llegar —sin dificultad— a la función de potencia siguiente:

$$\eta(\theta) = P\left[0 \leq P\left(\frac{n_1 K^D(\alpha_2)}{\theta}\right) \leq (n_1 - 1)\right] \; , \theta > \theta_o$$

Esta fórmula nos permite calcular la función de potencia del test, en función de:

$$\theta > \theta_o, n_1 \, y \, K^D(\alpha_2)$$

Tanto en la **primera** como en la **segunda situación**, conociendo el **umbral crítico de decisión** y aplicando una fórmula que se deduce de fórma análoga a la de la potencia del test, podrá calcularse de este modo el **nivel de significación:**

$$\alpha_2 = P\left[0 \leq P\left(\frac{n_1 K^D(\alpha_2)}{\theta_o}\right) \leq (n_1 - 1)\right]$$

Así pues, puede comprobarse como el cálculo de la potencia y el de la función de potencia del test pueden obtenerse sin dificultad y, sobre todo, de forma imnediata, siempre que se disponga de unas Tablas de Estadística que contenga valores de la función de cuantia de la variable aleatoria de Siméon-Denis POISSON(1830) acumulada (MARTINEZ y SAHAI,pp.144-151;1996)

1.3. Tercera situación hipotética

$$H_o : \frac{\theta_1}{\theta_2} = c_o$$

$$H_1 : \frac{\theta_1}{\theta_2} = c_1$$

$$c_1 > c_o$$

La fórmula inicial, que va a permitirnos expresar la potencia del test, en función de

$$c_1, n_1 \, y \, n_2, y \, K^D(\alpha_2)$$

es la siguiente:

$$\eta = P\left[\frac{n_2}{n_1} \frac{\sum_{j=1}^{j=n_1} X_j}{\sum_{j=1}^{j=n_2} Y_j} \geq K^D\left(\alpha_2\right) \mid \frac{\theta_1}{\theta_2} = c_1 \right]$$

Partiendo de los siguientes resultados (demostrados en los anexos III y VI, respectivamente):

$$\frac{\theta_2 n_2}{\theta_1 n_1} \frac{\sum_{j=1}^{j=n_1} X_j}{\sum_{j=1}^{j=n_2} Y_j} \hookrightarrow F_{2n_2}^{2n_1}$$

$$P\left[F_{2n_2}^{2n_1} \leq f \right] = 1 - P\left[0 \leq B\left((n_1 + n_2 - 1), \frac{1}{1 + \frac{n_2}{n_1 f}} \right) \leq (n_1 - 1) \right], f \in R_+^*$$

llegaremos —sin dificultad— a la potencia del test,

$$\eta = P\left[0 \leq B\left((n_1+n_2-1), \frac{1}{1+\frac{n_2 c_1}{n_1 K^D(\alpha_2)}} \right) \leq (n_1-1) \right]$$

tal como mostramos a continuación:

$$P\left(\frac{n_2}{n_1} \frac{\sum_{j=1}^{j=n_1} X_j}{\sum_{j=1}^{j=n_2} Y_j} \geq K^D\left(\alpha_2\right) \mid \frac{\theta_1}{\theta_2} = c_1 \right) = P\left(\frac{\theta_2\, n_2}{\theta_1\, n_1} \frac{\sum_{j=1}^{j=n_1} X_j}{\sum_{j=1}^{j=n_2} Y_j} \geq \frac{\theta_2}{\theta_1} K^D\left(\alpha_2\right) \right) =$$

$$= P\left(F_{2n_2}^{2n_1} \geq \frac{K^D(\alpha_2)}{c_1} \right) = P\left[0 \leq B\left((n_1+n_2-1), \frac{1}{1+\frac{n_2 c_1}{n_1 K^D(\alpha_2)}} \leq (n_1-1) \right) \right]$$

Por tanto, esta fórmula nos permite calcular la potencia del test

$$\eta = P\left[0 \leq B\left((n_1+n_2-1), \frac{1}{1+\frac{n_2 c_1}{n_1 K^D(\alpha_2)}} \right) \leq (n_1-1) \right]$$

en función de

$$c_1, n_1 \, y \, n_2, \, y \, K^D(\alpha_2)$$

Por último,si en esta fórmula hacemos:

$$n_2 = n_1 \;\; y \;\; c_1 = K^D(\alpha_2)$$

obtendremos la siguiente expresión:

$$\eta = P\left[0 \leq B\left((2n_1-1), 0.5 \right) \leq (n_1-1) \right]$$

1.4. Cuarta situación hipotética

$$H_o : \frac{\theta_1}{\theta_2} = c_o$$

$$H_1 : \frac{\theta_1}{\theta_2} > c_o$$

Si operamos de la misma forma que en la **tercera situación hipotética**, podemos llegar —sin dificultad— a la siguiente función de potencia:

$$\eta\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)=P\left(0\leq B\left((n_1+n_2-1),\frac{1}{1+\dfrac{n_2}{n_1K^D(\alpha_2)}\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right)}\right)\leq(n_1-1)\right),\frac{\theta_1}{\theta_2}>c_o$$

Esta fórmula nos permite calcular la función de potencia del test en función de

$$\frac{\theta_1}{\theta_2}>c_o, n_1 \text{ y } n_2 \text{ y}, K^D(\alpha_2)$$

Tanto en la tercera como en la cuarta situación hipotética, si conocemos el **umbral crítico de decisión** y aplicamos una fórmula análoga a la de la potencia del test, podremos calcular el **nivel de significación:**

$$\alpha_2=P\left[0\leq B\left((n_1+n_2-1),\frac{1}{1+\dfrac{n_2c_o}{n_1K^D(\alpha_2)}}\right)\leq(n_1-1)\right)$$

El cálculo de la potencia como el de la función de potencia del test será inmediato, si disponemos de unas Tablas de Estadística que contenga valores de la función de cuantía de la variable aleatoria Binomial acumulada(MARTINEZ y SAHAI,pp.87-131;1996).

2. DOS EJEMPLOS DE APLICACIÓN

2.1. Primer ejemplo

Planteamiento

Sea X una variable aleatoria que representa la fase terminal de un cáncer de próstata en una categoría de pacientes con la misma constitución genética.

Sabemos, por experiencia, que la variable aleatoria X sigue la Ley de WEIBULL:

$$X\hookrightarrow W(0,\theta,1)$$

Partiendo de una muestra aleatoria simple extraida de X obtenida de 10 pacientes en los que se ha diagnosticado cáncer de próstata, y bajo la siguiente situación hipotética:

$$H_o : \theta = 2$$

$$H_1 : \theta = 4$$

$$K^D(\alpha_2) = 3$$

calcúlese la potencia del test así como el nivel de significación.

Resolución

1º Cálculo de la potencia del test.

Sustituyendo los valores:

$$\theta = 4 \text{ , } n = 10 \text{ y } K^D(\alpha_2) = 3$$

en la fórmula deducida en la **primera situación hipotética** tenemos,

$$\eta = \sum_{z=0}^{z=9} \frac{e^{-(7,5)}(7,5)^z}{z!} = 0,77641$$

2º Cálculo del nivel de significación.

Sustituyendo los valores:

$$\theta = 2 \text{ , } n = 10 \text{ y } K^D(\alpha_2) = 3$$

en la fórmula contenida en la **segunda situación hipotética,** tenemos:

$$\alpha_2 = \sum_{z=0}^{z=9} \frac{e^{-(15)}(15)^z}{z!} = 0,06986$$

2.2. Segundo ejemplo

Planteamiento

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes que representan la fase terminal de un cáncer de próstata diagnosticado en dos categorías de pacientes de diferente constitución genética.

Se sabe, por experiencia, que las variables aleatorias X e Y siguen la Ley de WEIBULL:

$$X \hookrightarrow W(0,\theta_1,1) \text{ e } Y \hookrightarrow W(0,\theta_2,1)$$

A partir de una muestra aleatoria simple extraída de X e Y de 8 y 6 pacientes respectivamente, y bajo la siguiente situación hipotética:

$$H_o : \frac{\theta_1}{\theta_2} = 1$$

$$H_1 : \frac{\theta_1}{\theta_2} = 4$$

$$K^D(\alpha_2) = 3$$

calcúlese la potencia del test así como el nivel de significación.

Resolución

1º Cálculo de la potencia del test.

Sustituyendo los valores

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = 4, n_1 = 8 \text{ y } n_2 = 6, \text{ y } K^D(\alpha_2) = 3$$

en la fórmula deducida en la **tercera situación hipotética,** tenemos:

$$\eta = \sum_{z=0}^{z=7} \binom{13}{z} (0,5)^z (0,5)^{13-z} = 0,70947$$

2ª Cálculo del nivel de significación.

Sustituyendo los valores

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = 1 \cdot n_1 = 8 \text{ y } n_2 = 6 \text{ , y } K^D(\alpha_2) = 3$$

en la fórmula contenida en la **cuarta situación hipotética,** tenemos:

$$\alpha_2 = \sum_{z=0}^{z=7} \binom{13}{z} (0,8)^z (0,2)^{13-z}$$

Aunque el cálculo del segundo miembro de esta igualdad no puede realizarse directamente mediante una tabla de la función de distribución de la variable aleatoria Binomial, ya que ésta viene dada para valores de

$$p \leq 0,5$$

en realidad puede hacerse si se hace uso de la propiedad siguiente:

$$Si\, X \hookrightarrow B(n,p), Y = (n - X) \hookrightarrow B(n,q)$$

(GUEGAND,LEBOEUF y ROQUE,pp.150-153;1987).

Esta propiedad la aplican (ARAGON y TRINQUIER-ALCOUFFE,p. 162;1979) cuando p > 0,5.

Partiendo de esta propiedad,hemos deducido —sin dificultad— una expresión que nos permite realizar el cálculo del segundo mienbro directamente, tal como mostramos a continuación:

$$\sum_{x=0}^{x=k} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1 - \sum_{y=0}^{y=k-2} \binom{n}{y} q^y p^{n-y} \quad si\, k \geq 2, p + q = 1$$

Por lo tanto, haciendo uso de esta expresión, tenemos:

$$\sum_{z=0}^{z=7} \binom{13}{z} (0,8)^z (0,2)^{13-z} = 1 - \sum_{t=0}^{t=5} \binom{13}{t} (0,2)^t (0,8)^{13-t} =$$

$$= 1 - 0,96996 = 0,03004$$

Y, finalmente, deducimos lo siguiente:

$$\alpha_2 = 0,03$$

3. CONCLUSIÓN

Hace unos años aportamos unas fórmulas complicadas para el cálculo de la potencia y de la función de potencia del test, tanto en su forma como en el procedimiento para llegar al resultado final(DÍAZ-LLANOS y SAINZ-CALLEJA;1996).Sin embargo, en este estudio, proponemos otras fórmulas que resultan mucho más sencillas que éstas, y que nos llevan al mismo resultado para ambos casos.

Si duda,estas fórmulas que ahora proponemos constituyen una valiosa aportación, por su gran utilidad, para todos aquellos investigadores que suelen emplear estos cálculos, permitiendoles operar sin dificultad y obtener resultados más inmediatos a la hora de tomar sus decisiones.

4. ANEXOS

Anexo I

Sea X una variable aleatoria que representa un proceso en fase terminal. Se sabe, por experiencia, que la variable aleatoria X sigue la ley de WEIBULL:

$$X \hookrightarrow W(0,\theta,1)$$

Extraemos de X una muestra aleatoria simple de tamaño n y, a partir de ella, construimos una nueva variable aleatoria de la siguiente manera:

$$R_1 = \frac{2}{\theta} R$$

donde,

$$R = \sum_{j=1}^{j=n} X_j$$

La cuestión será demostrar que la variable aleatoria

$$R_1 \text{ sigue la Ley } \chi^2_{2n} \text{ de HELMERT}$$

$$R_1 \hookrightarrow \chi^2_{2n}$$

Para poder demostrarlo, hemos seguido cuatro etapas que expondremos a continuación.

1ª Etapa: Cálculo de la función característica de X

Partiendo de la definición de función característica(BRODEAU y ROMIER,pp.56-58;1973), podemos llegar —con facilidad— al resultado que deseamos alcanzar, operando de este modo:

$$\varphi_R(t) = E\left[e^{itX}\right] = \int_0^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx =$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_0^{+\infty} e^{-x\left(\frac{1}{\theta} - it\right)} dx = \frac{1}{\left[1 - i(\theta t)\right]}$$

Por lo tanto,

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\left[1 - i(\theta t)\right]}$$

2ª Etapa: Cálculo de la función característica de R

$$R=\sum_{j=1}^{j=n} X_j$$

Partiendo de la definición de función característica, llegamos —sin dificultad— al resultado que queremos conseguir, operando de la siguiente manera:

$$\varphi_R(t)=E\left[e^{itR}\right]=E\left[e^{it\sum_{j=1}^{j=n} X_j}\right]=$$

$$=\prod_{j=1}^{j=n} E\left[e^{itX_j}\right]=\frac{1}{[1-i(\theta t)]^n}$$

De ahí que

$$\varphi_R(t)=\frac{1}{[1-i(\theta t)]^n}$$

3ª Etapa: Cálculo de la función de densidad de R a partir de su función característica

El procedimiento que mostraremos a continuación, sólo puede realizarse cuando la función característica adopte la forma de la función característica deducida en la 2ª Etapa;esto es, la anterior. Dicho procedimiento consiste esencialmente en hacer uso de la función gamma(DUMAS DE RAULY,pp.137-144;1963).

Como veremos,los pasos a seguir serán tres.

Primer paso:

Partiendo de la definición de la función gamma

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} t^{p-1}\, e^{-t}\ dt \quad ,p>0 \quad [1]$$

si realizamos el cambio de variable t= h z, llegamos a la expresión

$$\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty} z^{p-1}\, e^{-hz}\ dz=\frac{1}{h^p}$$

tal como mostramos a continuación:

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1}\, e^{-t}\, d\,t = h^p \int_0^{+\infty} z^{p-1}\, e^{-h\,z}\ \ d\,z$$

Por tanto, tenemos

$$\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} z^{p-1}\, e^{-h\,z}\ \ d\,z = \frac{1}{h^p}\ \ ,p>0\ \ [2]$$

Segundo paso:

Si en la expresión que hemos obtenido en el paso anterior sustituimos

$$h\ y\ p\ por\left[1 - i(\theta\ t)\right] y\ n$$

respectivamente, resulta que el segundo miembro de la igualdad es la función característica de R:

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} z^{p-1}\, e^{-\left[1-i(\theta\,t)\right]z}\ \ d\,z = \frac{1}{\left[1 - i(\theta\ t)\right]^n}\ \ \ [3]$$

Tercer paso:

Si conseguimos mediante un cambio de variable adecuado

$$\theta\, z = r$$

que en la función subintegral aparezca

$$e^{itr}$$

el resto será la función de densidad de la variable aleatoria R. Para ello, partiendo del primer miembro de la fórmula [3], veremos que operando de forma conveniente lograremos lo deseado de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} z^{n-1}\, e^{-\left[1-i(\theta\,t)\right]z}\ \ d\,z = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} z^{n-1}\, e^{-z}\, e^{i(\theta\,t)z}\ \ d\,z =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)\,\theta^n} \int_0^{+\infty} r^{n-1}\, e^{-\frac{r}{\theta}}\, e^{itr}\ \ d\,r$$

Por tanto, tenemos

$$\frac{1}{\Gamma(n)\theta^n} \int_0^{+\infty} r^{n-1}\, e^{-\frac{r}{\theta}}\, e^{itr}\ \ d\,r = \frac{1}{\left[1 - i(\theta\ t)\right]^n}$$

De lo cual se deduce lo siguiente:

$$f_R(r;\theta) = \frac{r^{n-1} e^{-\frac{r}{\theta}}}{\Gamma(n)\theta^n} 1_{R^+}(r)$$

4ª Etapa: Cálculo de la función de densidad de

$$R_1 : f_{R_1}(r_1)$$

Partiendo de la función de densidad de

$$R : f_R(r)$$

y de la función de distribución de

$$R_1 : F_{R_1}(r_1)$$

podemos llegar —con facilidad— a la función de densidad de

$$R_1 : f_{R_1}(r_1)$$

operando de la siguiente manera:

$$F_{R_1}(r_1) = P(R_1 \leq r_1) = P\left(\frac{2}{\theta} R \leq r_1\right) =$$

$$P\left(R \leq \frac{\theta}{2} r_1\right) = F_R\left(\frac{\theta}{2} r_1\right)$$

Por lo tanto,

$$F_{R_1}(r_1) = F_R\left(\frac{\theta_1}{2} r_1\right)$$

Luego, al aplicar la regla de la cadena(BARTLE y SHERBERT,pp.208-211;2000), tenemos

$$\frac{d F_{R_1}(r_1)}{d r_1} = f_{R_1}(r_1) = \frac{d F_R\left(\frac{\theta_1}{2} r_1\right)}{d r} \frac{d\left(\frac{\theta_1}{2} r_1\right)}{d r_1} = \frac{\theta_1}{2} f_R\left(\frac{\theta_1}{2} r_1\right)$$

De lo cual, deducimos

$$f_{R_1}(r_1) = \frac{\theta}{2} f_R\left(\frac{\theta}{2} r_1\right)$$

A continuación,si en la función de densidad de R, en lugar de

$$r \; ponemos \frac{\theta}{2} r_1$$

y simplificamos, llegaremos a la función de densidad de

$$R_1 :$$

$$f_{R_1}(r_1) = \frac{r_1^{n-1} e^{-r_1}}{\Gamma(n) 2^n} 1_{R^+}(r_1)$$

Podemos observar entonces que la función de densidad de la variable aleatoria

$$R_1$$

es la de la

$$\chi^2_{2n} \; de \; HELMERT$$

Por tanto,

$$R_1 \hookrightarrow \chi^2_{2n}$$

Anexo II

Sea X una variable aleatoria que sigue la Ley de WEIBULL

$$X \hookrightarrow W(0,\theta,1)$$

y extraemos de X una muestra aleatoria simple de tamaño n.La cuestión consiste en demostrar la relación probabilística

$$P\left[\sum_{j=1}^{j=n} X_j \geq h\right] = P\left[0 \leq \mathrm{P}\left(\frac{h}{\theta}\right) \leq (n-1)\right], \frac{h}{\theta} \in R_+^*$$

Partiendo del resultado siguiente, que ya hemos demostrado en el anexo anterior,

$$\frac{2}{\theta} \sum_{j=1}^{j=n} X_j \hookrightarrow \chi^2_{2n}$$

y operando de forma conveniente, podemos llegar —sin dificultad— a la expresión que deseamos aquí demostrar, tal como exponemos a continuación:

$$P\left(\sum_{j=1}^{j=n} X_j \geq h\right) = P\left(\frac{2}{\theta}\sum_{j=1}^{j=n} X_j \geq \frac{2}{\theta} h\right) = P\left(\chi^2_{2n} \geq \frac{2}{\theta} h\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)2^n} \int_{\frac{2h}{\theta}}^{+\infty} w^{n-1} e^{-\frac{w}{2}} \, dw$$

Por lo tanto,tenemos

$$P\left(\sum_{j=1}^{j=n} X_j \geq h\right) = \frac{1}{\Gamma(n)2^n} \int_{\frac{2h}{\theta}}^{+\infty} w^{n-1} e^{-\frac{w}{2}} \, dw \quad [1]$$

Luego, aplicando (n-1) veces el método de integración por partes a la integral que aparece en [4], y operando de forma adecuada, llegaremos —con facilidad— a la siguiente expresión:

$$\int_{\frac{2h}{\theta}}^{+\infty} w^{n-1} e^{-\frac{w}{2}} \, dw =$$

$$= 2^n e^{-\frac{h}{\theta}} \left[\left(\frac{h}{\theta}\right)^{n-1} + (n-1)\left(\frac{h}{\theta}\right)^{n-2} + (n-1)(n-2)\left(\frac{h}{\theta}\right)^{n-3} + \ldots + (n-1)(n-2)..1 \right]$$

Después, sustituyendo este resultado en [4] y operando de forma conveniente, obtenemos —sin dificultad— esta expresión:

$$P\left(\sum_{j=1}^{j=n} X_j \geq h\right) = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{e-\left(\frac{h}{\theta}\right)\left(\frac{h}{\theta}\right)^r}{r!}$$

Así pues,

$$P\left(\sum_{j=1}^{j=n} X_j \geq h\right) = P\left[0 \leq P\left(\frac{h}{\theta}\right) \leq (n-1) \right] \quad , \frac{h}{\theta} \in R_+^*$$

Anexo III

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes que representan dos procesos en fase terminal.

Partimos también de que se sabe, por experiencia, que las variables aleatorias X e Y siguen la Ley de WEIBULL:

$$X \hookrightarrow W\left(0,\theta_1,1\right) e\, Y \hookrightarrow W\left(0,\theta_2,1\right)$$

Extraemos de X e Y una muestra aleatoria simple de tamaño n1 y n2, respectivamente. A partir de estas dos muestras, conseguimos construir una nueva variable aleatoria de la siguiente manera:

$$V = \frac{n_2\theta_2}{n_1\theta_1}\frac{R}{S}$$

donde tenemos que

$$R = \sum_{j=1}^{j=n_1} X_j \quad y \quad S = \sum_{j=1}^{j=n_2} Y_j$$

La cuestión consiste en demostrar:

$$1^{\circ}: V_1 = \frac{\theta_2}{\theta_1}\frac{R}{S}\ \text{siguela Ley}\ B_1\left(n_1,n_2\right)$$

$$V_1 \hookrightarrow B_2\left(n_1,n_2\right)$$

$$2^{\circ}: V = \frac{n_2}{n_1} V_1\ \text{sigue la Ley}\ F^{2n_1}_{2n_2}\ \text{de FISHER - SNÉDECOR}$$

$$V \hookrightarrow F^{2n_1}_{2n_2}$$

Primera demostración

La primera demostración la vamos a desarrollar en tres etapas:

1º Etapa: Cálculo de la función de dendidad conjunta de R y S

$$f_{R,S}(r,s)$$

Dado que las variables alearorias R y S son independientes, la función de densidad conjunta es igual al producto de las marginales:

$$f_{R,S}(r,s) = f_R(r)\, f_S(s) \quad [5]$$

Finalmente, sustituyendo las funciones de densidad marginales de R y S, ya calculadas en el anexo [I] en [5],obtenemos —con facilidad— la función de densidad conjunta de R y S:

$$f_{R,S}(r,s;\theta_1,\theta_2) = \frac{r^{n_1-1} s^{n_2-1} e^{-\left(\frac{r}{\theta_1}+\frac{s}{\theta_2}\right)}}{\Gamma(n_1)\,\Gamma(n_2)\,\theta_1^{n_1}\theta_2^{n^2}}\ 1_{R^+ x R^+}(r,s)$$

2^a Etapa: Cálculo de la función de densidad de la variable aleatoria

$$W_1 : W_1 = \frac{R}{S}$$

Para calcular la función de densidad de

$$W_1 : f_{W_1}(w_1;\theta_1,\theta_2)$$

definiremos una nueva variable auxiliar

$$W_2 = S$$

Por consiguiente, partiremos de dos variables:

$$W_1 = \frac{R}{S}$$

$$W_2 = S$$

Dado que el campo de variación de R y S es:

$$r \in R^+ \quad s \in R^+$$

el de

$$W_1 \, y \, W_2 \, es:$$

$$w_1 \in R^+ \quad w_2 \in R^+$$

En nuestro caso concreto, la transformación inversa de

$$w_1 = \varphi_1(r,s) = \frac{r}{s}$$

$$w_2 = \varphi_2(s) = s$$

es

$$r = \phi_1(w_1, w_2) = w_1 w_2$$

$$s = \phi_2(w_2) = w_2$$

Dicha transformación inversa es biyectiva para todo

$$(r,s) \in R^+ x \, R^+$$

y admite como Jacobiano:

$$J\left(\frac{r,s}{w_1,w_2}\right) = \text{Det}\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial w_1} & \frac{\partial r}{\partial w_2} \\ \frac{\partial s}{\partial w_1} & \frac{\partial s}{\partial w_2} \end{pmatrix} = \text{Det}\begin{pmatrix} w_2 & w_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = w_2$$

Ahora, es cuando ya disponemos de los elementos precisos para poder transformar

$$f_{R,S}(r,s)\ en\ g_{W_1,W_2}(w_1,w_2)$$

haciendo uso de un teorema asociado a la transformación de vectores aleatorios (LEPAGE,MOORE y ROY,pp.344-348;1975), que se particulariza en nuestro caso concreto de la siguiente manera:

$$g_{W_1,W_2}(w_1,w_2) = f_{R,S}\left(r = \phi_1(w_1,w_2), s = \phi_2(w_2)\right) \left| J\left(\frac{r,s}{w_1,w_2}\right)\right| \ 1_{R^+ x R^+}(w_1,w_2)$$

Si en la función de densidad conjunta de las variables R y S, en lugar de

$$r\ y\ s\ ponemos\ w_1 w_2\ y\ w_2$$

y, operamos de forma conveniente,llegamos a la función de densidad conjunta de

$$W_1\ y\ W_2:$$

$$g_{W_1,W_2}(w_1,w_2;\theta_1,\theta_2) = \frac{w_1^{n_1-1}\, w_2^{n_1+n_2-1}\, e^{-w_2\left(\frac{1}{\theta_2}+\frac{w_1}{\theta_1}\right)}}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)\theta_1^{n_1}\theta_2^{n_2}} \quad 1_{R^+ x R^+}(w_1,w_2)$$

A partir de la función de densidad conjunta, podemos obtener la función de densidad marginal haciendo uso de la fórmula (2) contenida el la 3ª etapa del anexo I, tal como mostramos a continuación:

$$g_{W_1}(w_1;\theta_1,\theta_2) = \frac{w_1^{n_1-1}}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)\theta_1^{n_1}\theta_2^{n_2}} \int_0^{+\infty} w_2^{n_1+n_2-1}\, e^{-w_2\left(\frac{1}{\theta_2}+\frac{w_1}{\theta_1}\right)}\, d\,w_2 =$$

$$= \frac{w_1^{n_1-1}}{B\left(n_1,n_2\right)\theta_1^{n_1}\,\theta_2^{n_2}\left[\frac{1}{\theta_2}+\frac{w_1}{\theta_1}\right]^{n_1+n_2}}$$

Por tanto, finalmente tenemos que

$$g_{W_1}(w_1;\theta_1,\theta_2)=\frac{w_1^{n_1-1}}{B\,(n_1,n_2)\theta_1^{n_1}\theta_2^{n_2}\left[\dfrac{1}{\theta_2}+\dfrac{w_1}{\theta_1}\right]^{n_1+n_2}}\;1_{R^+}(w_1)$$

3ª Etapa: Cálculo de la función de densidad de la variable aleatoria

$$V_1 : V_1=\frac{\theta_2}{\theta_1}W_1$$

Partiendo de la definición de la función de distribución de

$$V_1$$

operando de forma conveniente, podemos llegar a la función de densidad de

$$V_1$$

tal como mostramos a continuación:

$$F_{V_1}(v_1)=P\,(V_1\le v_1)=P\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}W_1\le v_1\right)=$$

$$=P\left(W_1\le\frac{\theta_1}{\theta_2}v_1\right)=F_{W_1}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}w_1\right)$$

De ahí que

$$F_{V_1}(v_1)=F_{W_1}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}v_1\right)$$

A continuación,aplicando la regla de la cadena(BARTLE y SERBERT,pp.208-211;2000), y operando convenientemente,llegamos a la función de densidad de la variable aleatoria

$$V_1$$

tal como mostramos a continuación:

$$\frac{d\,F_{V_1}(v_1)}{d\,v_1}=f_{V_1}(v_1)=\frac{d\,F_{W_1}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}v_1\right)}{d\,w_1}\frac{d\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}v_1\right)}{d\,v_1}=$$

$$=\frac{v_1^{n_1-1}}{B\,(n_1,n_2)[1+v_1]^{n_1+n_2}}$$

Así pues,

$$f_{V_1}(v_1)=\frac{v_1^{n_1-1}}{B\left(n_1,n_2\right)\left[1+v_1\right]^{n_1+n_2}}\ 1_{R^+}(v_1)$$

Como puede observarse, ésta es la función de densidad de la variable aleatoria:

$$\mathrm{B}_2\left(n_1,n_2\right)$$

De ahí que,

$$V_1 \hookrightarrow B_2\left(n_1,n_2\right)$$

Segunda demostración

Vamos a desarrollar la segunda demostración, anteriormente reseñada, en un único paso.

Único paso: Cálculo de la función de densidad de

$$V : V=\frac{n_2}{n_1}V_1$$

Si partimos de la definición de la función de distribución de

$$V$$

, y operamos de forma conveniente, podemos llegar a la función de densidad de

$$V$$

, tal como veremos a continuación:

$$F_V(v)=P\left(V\leq v\right)=P\left(\frac{n_2}{n_1}V_1\leq v\right)=$$

$$=P\left(V_1\leq\frac{n_1}{n_2}v\right)=F_{V_1}\left(\frac{n_1}{n_2}v\right)$$

Por lo tanto, tenemos lo siguiente

$$F_V(v)=F_{V_1}\left(\frac{n_1}{n_2}v\right)$$

Aplicando la regla de la cadena(BARTLE y SERBERT,pp.208-211;2000), y operando de modo conveniente, obtenemos la función de densidad de la variable aleatoria

$$V$$

, tal como exponemos a continuación:

$$\frac{d\,F_V(v)}{d\,v}=f_V(v)=\frac{d\,F_{V_1}\left(\frac{n_1}{n_2}v\right)}{d\,v_1}\,\frac{d\left(\frac{n_1}{n_2}v\right)}{d\,v}=\frac{n_1}{n_2}f_{V_1}\left(\frac{n_1}{n_2}v\right)$$

De ahí que

$$f_V(v)=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1}\frac{1}{B\left(n_1,n_2\right)\left[1+\frac{n_1}{n_2}v\right]^{n_1+n_2}}\;1_{R^+}(v)$$

Como puede observarse, se trata de la función de densidad de la variable aleatoria

$$F^{2n_1}_{2n_2}\ de\ FISHER\text{-}SNÉDECOR$$

Por tanto,

$$V\hookrightarrow F^{2n_1}_{2n_2}$$

Anexo IV

Este anexo contempla un conjunto de relaciones entre las variables aleatorias continuas que configuran este artículo:

Relación entre la variable aleatoria

$$F^{2n_1}_{2n_2}\ de\ FISHER\text{-}SNÉDECOR\,y\ la\ B_2\left(n_1,n_2\right)$$

$$F^{2n_1}_{2n_2}=\frac{n_2}{n_1}B_2\left(n_1,n_2\right)$$

Relación entre la variable aleatoria

$$B_2(n_1,n_2) \text{ y la } B_1(n_1,n_2)$$

$$B_2(n_1,n_2)=\frac{B_1(n_1,n_2)}{1-B_1(n_1,n_2)}$$

Relación entre la variable aleatoria

$$F_{2n_2}^{2n_1} \text{ y la } B_1(n_1,n_2)$$

$$F_{2n_2}^{2n_1}=\frac{n_2}{n_1}\left[\frac{B_1(n_1,n_2)}{1-B_1(n_1,n_2)}\right]$$

Anexo V

Demostrar la relación probabilística

$$P\left[B_1(n_1,n_2)\leq p\right]=1-P\left[0\leq B\left((n_1+n_2-1),p\right)\leq(n_1-1)\right]$$

Al amparo de la existencia de cierta similitud entre la Ley de probabilidad de la

$$B_1(n_1,n_2) \text{ y la Binomial: } B\left(n_1+n_2-1\right)$$

resulta razonable pensar que existe una relación probabilística entre ambas variables:

$$Y \hookrightarrow B_1(n_1,n_2) \rightarrow f_Y(y)=n_1\binom{n_1+n_1-1}{n_1}y^{n_1-1}(1-y)^{n_2-1} \qquad 0\leq y\leq 1$$

$$X \hookrightarrow B\left(n_1+n_2-1,p\right)\rightarrow P\left(X=x\right)=\binom{n_1+n_2-1}{x}p^x q^{(n_1+n_2-1)-x} \qquad p+q=1$$

Para deducir dicha relación, hemos partido de la siguiente definición:

$$P\left(B_1(n_1,n_2)\leq p\right)=\frac{1}{B(n_1,n_2)}\int_0^p y^{n_1-1}(1-y)^{n_2-1}\,dy \quad [6]$$

A continuación, hemos operado del siguiente modo:

Primero: Aplicando (n2-1) veces el método de integración por partes a la integral que figura en la fórmula (6).

Segundo: Sustituyendo el resultado de la integral en (6)

Como resultado, operando de forma conveniente, hemos llegado —sin dificultad— a la fórmula siguiente:

$$P\left[B_1(n_1,n_2)\leq p\right]=\sum_{x=n_1}^{x=n_1+n_2-1}\binom{n_1+n_2-1}{x}p^x(1-p)^{(n_1+n_2-1)-x} \qquad ,p+q=1$$

No obstante, desde un punto de vista operativo, podemos expresar esta fórmula de la siguiente manera:

$$P\left[B_1(n_1,n_2)\leq p\right]=1-\sum_{x=0}^{x=n_1-1}\binom{n_1+n_2-1}{x}p^x(1-p)^{(n_1+n_2-1)-x} \qquad ,p+q=1$$

O bien, lo que es lo mismo:

$$P\left[B_1(n_1,n_2)\leq p\right]=1-P\left[0\leq B\left((n_1+n_2-1),p\right)\leq(n_1-1)\right]$$

Anexo VI

Demostrar la relación probabilística

$$P\left[F_{2n_2}^{2n_1}\leq f\right]=1-P\left[0\leq B\left((n_1+n_2-1),\frac{1}{1+\frac{n_2}{n_1 f}}\right)\leq(n_1-1)\right]$$

Aplicando las relaciones entre las variables aleatorias

$$1^a: La\, F_{2n_2}^{2n_1}\ de\ FISHER\text{-}SNÉDECOR\ y\ la\ B_2(n_1,n_2)$$

$$2^a: La\, B_2(n_1,n_2)\ y\ la\ B_1(n_1,n_2)$$

y la relación probabilística entre las variables aleatorias

$$La\, B_1(n_1,n_2)\ y\ la\ Binomial: B\left[(n_1+n_2-1),p\right]$$

que aparecen contempladas en el anexo IV y V, respectivamente, llegamos —sin dificultad— a la relación probabilística que deseamos demostrar, tal como veremos a continuación:

$$P\left(F_{2n_2}^{2n_1} \leq f \right) = P\left(\frac{n_2}{n_1} B_2(n_1,n_2) \leq f \right) =$$

$$= P\left[\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{B_1(n_1,n_2)}{1 - B_1(n_1,n_2)} \right) \leq f \right] = P\left[B_1(n_1,n_2) \leq \frac{1}{1 + \frac{n_2}{n_1 f}} \right] =$$

$$= 1 - P\left[0 \leq B\left((n_1 + n_2 - 1), \frac{1}{1 + \frac{n_2}{n_1 f}} \right) \leq (n_1 - 1) \right]$$

Por lo tanto, concluimos con la siguiente expresión

$$P\left(F_{2n_2}^{2n_1} \leq f \right) = 1 - P\left[0 \leq B\left((n_1 + n_2 - 1), \frac{1}{1 + \frac{n_2}{n_1 f}} \right) \leq (n_1 - 1) \right]$$

Anexo VII

En este anexo exponemos una aclaración, que hemos considerado necesaria, a las fórmulas más relevantes de este trabajo.

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\alpha : \textit{nivel de significación}$$

$$\alpha_1 : \textit{nivel de significación}$$

$$[\textit{test de hipótesis unilateral a la izquierda}]$$

$$[\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \, ; \alpha_2 = 0]$$

$$\alpha_2 : \textit{nivel de significación}$$

$$[\textit{test de hipótesis unilateral a la derecha}]$$

$$[\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \, , \alpha_1 = 0]$$

$$K^1(\alpha_1)$$

$$\textit{Umbral crítico de decisión}$$

$$[\textit{test de hipótesis unilateral a la izquierda}]$$

$$K^{D}(\alpha_2)$$

Umbral crítico de decisión

[test de hipótesisunilaterala la derecha]

$$B\,(n_1, n_2) = \frac{\Gamma(n_1)\,\Gamma(n_2)}{\Gamma(n_1 + n_2)}$$

Relación entre la función B y la función Γ

$$X \hookrightarrow B\,(n, p)$$

La variable aleatoria X sigue la Ley Binomial

$$X \hookrightarrow B_1\,(n_1, n_2)$$

La variable aleatoria X sigue la Ley B_1

$$X \hookrightarrow B_2\,(n_1, n_2)$$

La variable aleatoria X sigue la Ley B_2

$$X \hookrightarrow W\,(0, \theta, 1)$$

La variable aleatoria X sigue la Ley de WEIBULL

de parámetros $(0, \theta, 1)$

$$X \hookrightarrow P\left(\frac{n_1 K^{D}(\alpha_2)}{\theta_1}\right)$$

La variable aleatoria X sigue

la Ley de Siméon - Denis POISSON (1830) de parámetro

$$\frac{n_1 K^{D}(\alpha_2)}{\theta_1} \in R_{+}^{*}$$

$$X_j \hookrightarrow W\,(0, \theta_1, 1)\;,\; 1 \leq j \leq n_1$$

$$R_1 = \frac{2}{\theta_1} \sum_{j=1}^{j=n_1} X_j \hookrightarrow \chi^2_{2n_1}$$

La variable aleatoria R_1 *sigue*

la Ley $\chi^2_{2n_1}$ *de Helmert (1875)*

$$X_j \hookrightarrow W(0,\theta_1,1),\ 1 \leq j \leq n_1$$

$$Y_j \hookrightarrow W(0,\theta_2,1),\ 1 \leq j \leq n_2$$

$$V = \frac{\theta_2 n_2}{\theta_1 n_1} \frac{\sum_{j=1}^{j=n_1} X_j}{\sum_{j=1}^{j=n_2} Y_j} \hookrightarrow F^{2n_1}_{2n_2}$$

La variable aleatoria V sigue

la Ley $F^{2n_1}_{2n_2}$ *de FISHER-SNÉDECOR*

$$R^+$$

Números reales positivos

$$R^*_+$$

Números reales positivos excluido el 0

$$1_{R^+}(x)$$

Designa la función indicadora de R^+

tal que: $1_{R^+}(x) = 1$ *si* $x \in R^+$

y $1_{R^+}(x) = 0$ *si* $x \notin R^+$

$$1_{R^+ x\, R^+}(x,y)$$

Designa la función indicadora de $R^+ x\, R^+$

tal que : $1_{R^+ x\, R^+}(x,y) = 1$ *si* $(x,y) \in R^+ x\, R^+$

y $1_{R^+ x\, R^+}(x,y) = 0$ *si* $(x,y) \notin R^+ x\, R^+$

BIBLIOGRAFÍA

ARAGON Y., TRINQUIER-ALCOUFFE C. (1979). Introduction à la Statistique en Sciences Sociales. Privat.

BAILLE A., BARRA J R. (1969). Problèmes de Statistique Mathématique. Dunod.

BARTLE R G., SHERBERT D R. (2000). Introducción al Análisis Matemático de una variable. 2ª Edición. Limusa Wiley.

BERNIER J, ULMO J. (1973). Éléments de décision statistique. Presses Universitaires de France.

BRODEAU F., ROMIER G. (1973). Mathématiques pour l'informatique. 4. Probabilités. Armand Colin.

CALOT G. (1967). Cours de Calcul de Probabilités. Dunod

CARON N., TASSI Ph. (1991). Problèmes resolus de statistique Mathématique. Economica.

DÍAZ-LLANOS y SAINZ-CALLEJA Fco J. (1993). Formulaciones de interés en la Estadística Aplicada. Registro Provincial de la Propiedad Intelectual de Madrid. Número 13975.

DÍAZ-LLANOS y SAINZ-CALLEJA Fco J. (1995). Un estudio de la Ley de Vilfredo Federico Dámaso Pareto (1848-1923). Ediciones UEM-CEES.

DÍAZ-LLANOS y SAINZ-CALLEJA Fco J. (1996). Un estudio de la Ley de W. WEIBULL. Ediciones UEM-CEES.

DÍAZ-LLANOS y SAINZ-CALLEJA Fco J. (1999). Un nuevo procedimiento para la determinación del tamaño de la muestra en las ciencias experimentales. Anales de la Real Academia de Doctores de Madrid. Volumen 3, pp. 143-156.

DUDEWICZ E., MISHRA S N. (1988). Modern Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York. London. Sydney.

DUMAS DE RAULY D. (1963). Problèmes de mathématiques. Gautier-Villars Éditeur.

DUMAS DE RAULY D. (1966). L'estimation statistique. Gauthier- Villars Éditeur.

FOUCART T. (1991). Introduction aux tests statistiques. Enseignement assité par ordinateur. Editions Technip.

GUEGAND J., LEBOEUF Ch., ROQUE J-L. (1987). Cours de probabilités et de statistiquee. 2ème édition. Edition Marketing.

KALBFLEISCH J G. (1984). Probabilidad e Inferencia Estadística. Tomos: 1 y 2. Editorial AC.

LECOUTRE J-P., LEGAIT S., TASSI Ph. (1987). Statistiques. Exercices corrigés avec rappels de cours. Masson.

LEGAIT S., TASSI Ph. (1990). Théorie des probabilités en vue des applications statistiques. Editions Technip.

LEPAGE Y., MOORE M., ROY R. (1975). Introduction à la Théorie des Probabilités. Les Presses de l'Université de Québec.

MARTINEZ W., SAHAI H. (1996). Tablas y Fórmulas Estadísticas para las Ciencias Biológicas, Sociales y Físicas. Grupo Editorial Iberoamérica.

MONFORT A. (1980). Cours de probabilités. Annexe de Philippe TASSI. 2ª Edition. Economica.

MONFORT A. (1982). Cours de Statistique Methématique. 2ª Edition. Economica.

POLLARD A., RIVOIRE C. (1971). Fiabilité et Statistiques prévisionnelles. Méthode de WEIBULL. Editions Eyrolles.

RAO C R. (1965). Linear statistical Inference and its applications. John Wiley & Sons, Inc., New York. London. Sydney.

SAPORTA G. (1990). Probabilités. Analyse des Données et Statistique. Editions Technip.

TASSI Ph. (1985). Méthodes Statistiques. Economica.

VALLECILLOS JIMÉNEZ A. (1996). Inferencia estadística y enseñanza: un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas. Editorial Comares.

WEIBULL W. (1951). A Statistical Distributions Function of wide applicability. Journal of Applied Machanics,18.